Corso in Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica *(V. Malvestuto)*

LEZIONE 1

Gli inizi: Cardano, Pascal, Newton e il gioco dei dadi

Gerolamo Cardano (Pavia 24/9/1501 – Roma 20/9/1576) è il primo intellettuale di statura europea nel mondo occidentale a considerare la materia di questo corso degna di attenzione da parte di un erudito (prima di lui esistono solo sporadici accenni ad alcuni problemi sul gioco dei dadi, come nella *Summa* di Luca Pacioli). Cardano raccoglie le sue riflessioni sull'argomento in quello che può riguardarsi il primo trattato della storia sul calcolo delle probabilità (*Liber de ludo aleae*, 1524). Non si tratta solo di riflessioni teoriche. Cardano, di umili origini, usò effettivamente nel gioco d'azzardo le sue scoperte per procurarsi i mezzi necessari a finanziare gli studi alla scuola medica di Pavia. Il suo contributo alla teoria della probabilità è il fondamento stesso del calcolo delle probabilità su basi matematiche. Egli ebbe chiare le quattro nozioni basilari di quella che è stata poi chiamata la "teoria classica" della probabilità:

1. la frequenza con cui si verifica ognuno dei possibili esiti di un esperimento, non esattamente prevedibile ma ripetuto in condizioni controllate (com'é il lancio di un dado), può essere prevista a priori con buona approssimazione ricorrendo ad un calcolo matematico che sfrutti accortamente le simmetrie implicite nelle modalità dell'esperimento;

2. il risultato di questo calcolo è un numero fra 0 e 1, definito probabilità del dato evento, che allo stesso tempo esprime il grado di fiducia che riponiamo nel verificarsi del dato evento e fornisce una buona stima della frequenza per un numero elevato di prove;

3. il passo essenziale per eseguire con successo il calcolo di una probabilità è individuare correttamente il novero degli esiti possibili <u>equiprobabili</u> di un dato esperimento; per esempio, nel lancio di due dadi gli esiti possibili della somma sulle due facce sono undici (2,3,4,….12), ma Cardano sapeva che non si tratta di eventi equiprobabili, mentre tali sono i 36 eventi definiti dalle <u>coppie ordinate</u> dei risultati che compaiono sulle facce dei due dadi: (1,1), (1,2), …., (1,6), (2,1), (2,2),…., (2,6), (3,1) ... …………..(6,6).

4. la probabilità di un evento è il rapporto fra il numero dei casi ad esso favorevoli e il numero totale dei casi possibili (purchè tutti equiprobabili, secondo quanto detto al punto 3).

Bisogna aspettare più di un secolo prima che un altro intellettuale europeo di grande levatura torni a dedicare la sua attenzione a questo ordine di problemi. E ciò si deve ancora all'interesse suscitato dalla pratica del gioco dei dadi e dalla necessità da parte di un giocatore di battere la concorrenza. Intorno al 1654, uno sfaccendato cavaliere francese dedito al gioco, tale cavalier De Méré, che aveva delle idee alquanto sbagliate sulla probabilità, ma cui non mancava lo scrupolo di annotare le percentuali con cui uscivano nel gioco reale le varie combinazioni, si accorge che certi eventi, da lui ritenuti più probabili di altri, escono in realtà meno spesso di quanto egli si aspetta. Egli conosce un giovane di talento, Blaise Pascal (Clermont 19/6/1623 – Port Royal 19/8/1662) che ha stupito con la precocità del suo genio il circolo degli intellettuali parigini (a 16 anni pubblica un *Trattato sulle sezioni coniche*, a 18 inventa una macchina calcolatrice, intorno ai 20 pone le basi della statica dei fluidi), un genio destinato tuttavia ad un'altrettanto precoce decadenza psicofisica (poco dopo i 32 anni sprofonderà nella melma delle disquisizioni teologiche, seppure conservando lo stile di fine letterato e la vena di polemista mordace, discetterà per lo più di bagattelle stantie come la grazia divina e la salvezza eterna e dedicherà gran parte del suo tempo a scrivere un'*Apologia del cristianesimo*, pubblicata, postuma e incompiuta, sotto il titolo di *Pensieri*, perchè la morte lo coglierà a 39 anni). A questo giovane di talento, poco prima della sua conversione al giansenismo, De Méré sottopone quelli che, per colpa delle sue erronee nozioni sulla probabilità, ritiene dei veri e propri paradossi. Ecco due dei quesiti posti dal giocoso cavaliere a Pascal.

<u>1° QUESITO</u>. Se si lanciano 3 dadi, è un fatto che la somma 11 tende a uscire più spesso del 12. Invece, secondo il cavaliere, i due eventi hanno le stesse chances, dal momento che entrambi si possono formare in sei soli diversi modi:

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3$$

$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$$

Allora perchè l'esperienza al tavolo da gioco mostra che conviene scommettere sull'11 piuttosto che sul 12 ? La risposta di Pascal si lascia come esercizio al lettore.

<u>2° QUESITO</u>. A un giocatore si offre la possibilità di vincere un "miliardo" se realizza un punteggio ai dadi. Egli può optare per l'una o l'altra fra due modalità per tentare la sorte: può lanciare una sola volta 4 dadi e in tal caso vincerà se compare almeno un 6 su qualcuna delle quattro facce; oppure può scegliere di lanciare per ben 24 volte 2 dadi, e in tal caso vincerà il miliardo se e non appena otterrà 6 su entrambe le facce. Se voi foste quel giocatore, quale modalità di gioco scegliereste ? Pascal anche in questo caso diede la risposta esatta, che è quella controintuitiva. Ma Biagio non sapeva che Gerolamo aveva già affrontato e risolto lo stesso problema 130 anni prima di lui. E veniamo ora al grande Isacco.

Circa 40 anni dopo, la storia sembra ripetersi. Un altro nobile sfaccendato, dedito al gioco d'azzardo, con idee ancor più erronee sul calcolo delle probabilità, ma altrettanto coscienzioso nell'annotare i fatti al tavolo da gioco, un certo Samuel Pepys, noto nei circoli londinesi dell'epoca, ha la fortuna di conoscere Newton (Woolsthorpe 25/12/1642 – Londra 20/3/1727) sicchè nell'anno 1693 gli sottopone un altro "paradosso":

E’ più facile ottenere un 6 (almeno uno) lanciando 6 dadi o due 6 (almeno due) lanciandone 12 ?

Newton, “after an easy computation”, diede la risposta giusta, che è di nuovo quella controintuitiva. Ma Mr. Pepys non accettò la conclusione e sfidò Newton a fornire argomenti. Allora Newton gli mostrò i calcoli, ma poichè nemmeno questo servì a convincerlo, il buon Samuele continuò impeterrito a sostenere le sue tesi nei suoi fitti carteggi, il che ci consente ancora oggi di additarlo ad esempio di testarda ottusità. A sua parziale discolpa, si deve del resto riconoscere che questa ostinazione nel perseverare nei propri errori è tipica nell’ambito del calcolo delle probabilità, la cui storia è costellata di abbagli clamorosi presi anche da personalità insigni. La maggior parte di questi errori sono dovuti o all’ambiguità delle formulazioni o all’incapacità di riconoscere la non equiprobabilità degli eventi elementari posti alla base del calcolo; la parte restante a fraintendimenti del significato della così detta “legge dei grandi numeri” o alla confusione fra probabilità a priori e probabilità a posteriori. Tutto ciò sarà oggetto delle successive lezioni.

-

-

BIBLIOGRAFIA

-

Feller W. , 1957 : *An introduction to probability theory and its applications* - *Vol. 1*. J.Wiley & Sons, 3rd edition.

Penrose R., 1994 : *Shadows of the mind* . Tradotto da E. Diana : *Ombre della mente* , Rizzoli, 1996 (557 pp.)

Rozanov Y.A., 1969: *Introductory probability theory*. Prentice Hall (traduz. dal russo di R.A. Silverman)

Per la figura di Cardano si veda, oltre alla rievocazione nel citato testo di Penrose (pp. 310-8):

- Boyer C.B. , 1968 : *Storia della matematica*. Mondadori (pp. 327-336).

- Loria G., 1950: *Storia delle matematiche*. Hoepli (2.a ediz., Cap. XVI°)

- Singh S., 1997: *L’ultimo teorema di Fermat*. BUR (p. 61).

e, in lingua inglese:

- Kline M., 1953: *Mathematics in western culture*. Oxford Univ. Press (p 99-100).

- Ore O., 1953: *Cardano, the gambling scholar*. Princeton Univ. Press.

ESERCIZI PROPOSTI

1) Due giocatori, A e B, scommettono poste uguali sul lancio di 2 dadi. A vince se esce un totale di 6, 7 oppure 8. B vince in tutti gli altri casi. Quale giocatore vorreste essere, A o B ?

2) Un’urna contiene 3 palle bianche e 4 nere. Si estrae una palla e poi un’altra, senza rimettere dentro la prima. Qual è la probabilità che le due palle siano di colore diverso ? Cambia la risposta se prima della seconda estrazione si rimette dentro la prima palla estratta?

3) Si lanciano in aria 4 monete. Qual è la probabilità di ottenere testa su tutte e quattro ? Cambia la risposta se si lancia quattro volte consecutive una stessa moneta?

4) Si estraggono 2 carte a caso da un mazzo di 52 carte francesi. Qual è la probabilità che le due carte siano la donna di cuori e il fante di picche? E qual è la probabilità di beccare 2 assi ? Di quanto aumenta la probabilità di prendere almeno 2 assi se invece che 2 si estraggono dal mazzo 3 carte? 4 carte?

5) Un’edizione della Divina Commedia (3 volumi) deve essere collocata su uno scaffale. Qual è la probabilità che disponendo i 3 volumi a caso, essi si trovino in ordine sequenziale (non importa in che verso)? E qual è la probabilità che i 3 volumi si trovino indivisi se vengono sistemati a caso sullo scaffale insieme a Iliade ed Odissea ?

6) Nel gioco della roulette russa (raccomandabile solo agli aspiranti suicidi con un debole per il gioco d’azzardo) si inserisce una pallottola nel tamburo di un revolver che ne può contenere otto. Poi si fa ruotare ripetutamente il tamburo, si punta la canna alla tempia e si preme il grilletto . . .

Se il colpo va a vuoto, si ruota il tamburo prima di sfidare di nuovo la sorte. Qual è la probabilità di rimanere vivi dopo il primo colpo ? Dopo il secondo ? Dopo il terzo ? Come cambiano le risposte se l’aspirante suicida è anche un pigro, cioè non ruota mai il tamburo dopo un colpo andato a vuoto ?

7) In un cassetto del comodino sono stati messi alla rinfusa 10 pedalini blu, 8 rossi e 6 grigi. L’uomo si alza, come al solito, in stato comatoso e al buio apre il cassetto e prende a caso dei calzini. Qual è la probabilità di prenderne un paio buono da indossare, se ne prende due? tre? quattro?

8) Nella borsa di una donna ci sono, dispersi nel caos totale, 5 accendini di cui 3 ormai esauriti. Nel tentativo di accendere una sigaretta lei riesce ad afferrare 3 accendini. Qual è la probabilità che nessuno dei 3 funzioni? Che uno solo funzioni? Che più di uno funzioni?

9) Si lancia un dado fino a che non appare il 6. Qual è la probabilità che ciò accada al primo colpo? al secondo? al terzo? al decimo? Quanti lanci servono per essere sicuri a priori di vedere comparire il 6?

10) Stai giocando una mano di poker con 3 amici (carta minima = 7). E' in corso la distribuzione delle carte. Qual è la probabilità che tu ti veda servire:

a) una scala reale massima di cuori?

b) una scala reale di cuori qualsiasi?

c) una scala reale qualsiasi?

d) un poker qualsiasi?

e) un full?

f) un tris d'assi?

Suggerimento: ignorare la presenza degli altri giocatori, quello che conta è che si estraggono 5 carte a caso da un mazzo che è composto in un certo modo.

Nota: *Le risposte a questi dieci problemi saranno date nella lezione n. 2 insieme al procedimento risolutivo.*

Corso in Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica *(V. Malvestuto)*

LEZIONE 2

La definizione classica generale di Probabilità e il paradosso di Bertrand.

Le tre scuole: assiomatica, frequentistica, soggettivistica. Chi ha ragione?

La definizione classica originaria di probabilità di un evento come rapporto fra numero di casi favore-voli e numero di casi possibili, purchè tutti equiprobabili, è carente sotto vari punti di vista.

Esaminiamo tre obiezioni di cui solo le ultime due sono significative.

1) La definizione classica sottintende un circolo vizioso. Infatti nel definire la probabilità di un evento si invoca il concetto stesso che si vuole definire, nell'istante in cui si parla di eventi equi*probabili*. In realtà questa obiezione è sofistica e accademica. E' vero che il termine equiprobabile richiede già una certa conoscenza del concetto di probabilità. Ma si può facilmente rispondere con un postulato preliminare: N eventi diconsi equiprobabili se non esiste alcun motivo, né fattuale né di principio, per pensare che qualcuno di essi si verifichi con una frequenza maggiore di qualsiasi altro. Come si vede, in questa definizione non si fa ricorso al concetto di probabilità, bensì a quello di frequenza. Il suddetto postulato è generalmente noto come "principio di indifferenza". A ben riflettere, anche il concetto di temperatura viene definito presupponendo che si sappia almeno riconoscere in anticipo se due corpi hanno la stessa temperatura. Nell'apparato logico della termodinamica la definizione di corpi isotermici viene presupposta e precede la definizione operativa di temperatura, quella cioè che mette in grado il fisico di associare un numero alla grandezza stessa. La verifica che due corpi siano isotermici si può fare infatti senza misurarne la temperatura, ma semplicemente mettendoli in contatto termico e controllando che non vi sia passaggio di calore fra loro né in un senso né nell'altro.

2) La definizione classica di probabilità ha un ambito di applicabilità troppo angusto. Per esempio, non sarebbe possibile valutare la probabilità che un ago, libero di ruotare in un cerchio, si fermi casualmente all'interno di un qualsiasi assegnato settore del cerchio. Qui il problema nasce dal fatto che sia i casi possibili, sia casi i favorevoli sono infiniti, tanti quante sono le diverse possibili posizioni finali dell'ago all'interno di un angolo prescelto comunque piccolo. Per giunta tali infinità sono infinità con la potenza del continuo. Ma anche l'intervento di infinità di tipo numerabile vanifica l'applicabilità della definizione classica. Qual è la probabilità che un intero positivo, scelto a caso, sia multiplo di 5? Ognuno

sa che tale probabilità è 1/5, ma tale risposta, in sé banale, non può ricavarsi usando semplicemente la definizione classica originaria di probabilità, perché sia la totalità dei numeri interi (i casi possibili) che la totalità dei multipli di 5 (i casi favorevoli) sono un'infinità di numeri. Come si possa superare questa limitazione si dirà più avanti, il che ci consentirà di arrivare alla definizione classica estesa ed anche al paradosso di Bertrand. Per ora, esaminiamo la terza obiezione, il che ci darà modo di discutere il punto di vista della scuola frequentistica.

3) Un altro limite troppo restrittivo insito nella definizione classica di probabilità è la richiesta che gli eventi elementari usati come casi possibili siano tutti equiprobabili. Facciamo qualche esempio. Qual è la probabilità che durante il 2002 qualche fulmine cada all'interno del Grande Raccordo Anulare di Roma? Possiamo dare una risposta convincente a questa domanda solo esaminando le statistiche per esempio dell'ultimo secolo. Se dal 1901 al 2000 sono stati 25 gli anni nei quali si è registrato almeno un fulmine caduto nell'area delimitata dal GRA, allora è ragionevole pensare che la probabilità richiesta sia ¼ , cioè 25%, dato su cui si baseranno le compagnie di assicurazione per stipulare le loro polizze di assicurazione che coprono i casi di infortunio e di incendio. La definizione classica invece non ci è di alcun aiuto per determinare il suddetto valore di probabilità. Infatti non è possibile per un evento del genere individuare a priori dei casi possibili, né dei casi favorevoli, contando i quali valutare la probabilità richiesta. E' vero che il valore ottenuto si presenta ancora come il rapporto fra due numeri: il numero di anni in cui è caduto qualche fulmine, e il numero totale di anni presi in esame. Ma questi numeri non possono considerarsi come numero di casi favorevoli e numero di casi possibili secondo la definizione classica, perché questi andrebbero determinati a priori, indipendentemente dai fatti osservati. Quello che invece si è fatto è calcolare semplicemente una frequenza relativa su un numero elevato di fatti osservati e assimilarla alla probabilità. Difatti una frequenza relativa per un dato evento è definita proprio come il rapporto fra il numero di volte in cui un evento si è effettivamente verificato e il numero totale di osservazioni fatte. Nel caso di un dado il procedimento equivale a rinunciare a prendere in considerazione la simmetria delle facce del dado, lanciare il dado un gran numero N di volte, registrare quante di queste volte compare il 6 sulla faccia superiore, diciamo n, e identificare la probabilità col rapporto n/N, rapporto che in realtà è la frequenza relativa osservata del 6. Questo procedimento di identificare frequenza relativa di un evento con la sua probabilità (punto di vista che è stato proposto e sviluppato a partire dagli anni venti da von Mises e Reichenbach, capiscuola della così detta **scuola frequentistica**) ha diversi difetti, se adottato in modo radicale. Primo, è un procedimento tautologico, perché il valore della definizione di probabilità consiste nel fatto che, pur essendo la valutazione di una probabilità indipendente in linea di principio dall'osservazione fattuale, il suo valore è ben approssimato da tutti i valori di frequenza relativa per lo stesso evento che si possono desumere dall'esperienza. Se invece postuliamo che la probabilità coincide con la frequenza relativa, tale identità risulta banalmente vera in virtù di una *petitio principii*, il che svuota completamente di significato l'impegno, insito nella definizione classica, di predire alcune proprietà dei fatti osservati facendo ricorso esclusivamente ad un'analisi speculativa a priori basata sul riconoscimento delle simmetrie implicite nel fenomeno in esame. Secondo difetto, se proviamo a calcolare la probabilità come una frequenza, sorge il problema di quanta statistica vada usata per calcolare la frequenza. In effetti, nel problema del fulmine dentro il GRA, si poteva prendere come campione di riferimento non un secolo, ma gli ultimi 50 anni, oppure due secoli, e le risposte sarebbero state sicuramente diverse: avremmo facilmente ottenuto 28% o 22%, invece che 25%. Allora qual è il vero valore della probabilità in questo problema? Mentre la frequenza di un evento calcolata su campioni di taglia diversa può differire da caso a caso, il concetto di probabilità dovrebbe misurare una proprietà costante dell'evento, una sua caratteristica intrinseca, indipendente cioè dal numero di volte che noi siamo disposti ad osservarlo. Altrimenti non sarebbe sensata l'introduzione

stessa del concetto di probabilità e potremmo benissimo accontentarci di parlare solo di frequenze. La scuola frequentistica ha cercato di risolvere questo problema, ma lo ha fatto nel modo più cretino possibile: la soluzione proposta è che, mentre il calcolo di una frequenza richiede un numero finito di osservazioni, per calcolare la probabilità dell'evento ne occorre un numero infinito! Infatti la probabilità viene definita dai frequentisti come il limite della frequenza relativa di un evento quando il numero di osservazioni tende a infinito! Questa scelta è il suicidio stesso del punto di vista frequentistico. Questa scuola di pensiero, partita da un'impostazione pragmatica e strettamente empirica, in antitesi alla pretesa impostazione *idealistica* insita nella definizione classica, finisce in un gesto utopistico disperato, cioè l'introduzione di un'irrealizzabile infinità di atti osservativi, che preclude per principio un vero controllo basato sui fatti osservabili. Nata insomma con la pretesa di fornire una definizione concreta e operativa di probabilità, la scuola frequentistica approda, per risolvere le sue difficoltà interne, ad una definizione che per sua stessa struttura è antitetica a tutti i principi dell'operazionismo. Purtuttavia l'approccio frequentistico è tuttora molto diffuso, soprattutto nelle facoltà di statistica e fra gli statistici professionisti e gli attuari, i quali nel loro lavoro hanno molto più spesso a che fare con problemi come quello del fulmine, piuttosto che col lancio di dadi. In effetti, bisogna riconoscere che, quando è impossibile, esaminando il fenomeno, rintracciare un numero sufficiente di simmetrie nelle sue modalità di accadere, e individuare quindi sia un insieme di casi possibili tutti equiprobabili, sia, al suo interno, il sottoinsieme di casi favorevoli all'evento preso in considerazione, il punto di vista frequentistico indica, in mancanza di meglio, una via praticabile per dare una valutazione della probabilità dell'evento. Ma in tal caso occorre essere consapevoli che tutto quello che si ha è una stima più o meno approssimata della probabilità che si cerca, non il valore vero della probabilità. Abbiamo però acquisito comunque un risultato importante. Così facendo, siamo in grado di estendere il concetto di probabilità e di usare tutto l'armamentario del calcolo delle probabilità per tentare predizioni su eventi sui quali non avremmo altrimenti nulla di quantitativo da dire. Purtroppo un frequentista puro è costretto ad andare oltre e, mentre guadagna un ambito di fenomeni alla sua capacità di analisi, ne perde uno altrettanto vasto. Infatti, se gli si presenta un dado nuovo di zecca, anche se è stato lui stesso a costruirlo con le sue mani, ponendo la massima attenzione ad evitare di privilegiare in alcun modo nessuna delle sei facce, e se gli si chiede qual è la probabilità che lanciandolo esca il 6, egli non può che rifiutarsi di rispondere e ammettere la propria assoluta ignoranza in merito. Solo dopo aver osservato migliaia di lanci di quel dado, potrà egli calcolare la frequenza relativa del 6 ed arrivare ad una stima della probabilità in questione. Un altro tipico problema davanti al quale un frequentista viene colto da paralisi afasica è il seguente: qual è la probabilità che prendendo un pianeta a caso nella galassia esso sia abitato oggi da esseri intelligenti con una civiltà tecnologica? C'è un modo di ragionare speculativo (cfr. ad esempio P. Angela, 1981: "Nel cosmo alla ricerca della vita", 2.a ediz.,Garzanti,Cap. 6), molto vicino al punto di vista classico, che porta a valutare questa probabilità come prossima ad uno su un milione (e quindi a un numero enorme di civiltà tecnologiche attualmente esistenti nella nostra galassia). Il frequentista, dal canto suo, per rispondere alla stessa domanda cercherà nell'unica statistica per ora disponibile. Si conoscono solo 9 pianeti di cui uno abitato da esseri intelligenti (intelligenti ?). Quindi l'unica frequenza disponibile è 1/9, cioè circa l'11%. Ma il campione è così poco numeroso (e così poco indicativo) che egli non crederà assolutamente a questi numeri e si vedrà costretto a tacere del tutto. In più considererà priva di qualsiasi fondamento la stima fatta con qualsiasi altro metodo, il che ci lascia senza uno straccio di risposta. Anche nel caso in cui si chieda ad un frequentista di valutare la probabilità che un intero positivo sia multiplo di 5, egli dovrà rinunciare a rispondere, a causa dell'enorme difficoltà di procurarsi un campione casuale rappresentativo dell'insieme dei numeri naturali. E invece la risposta al quesito è di una banalità disarmante, 20%. Ebbene, a mio avviso, siamo qui davanti ad un ottuso eccesso di scrupolo. Non ogni conoscenza ci viene dall'esperienza, come hanno chiarito le indagini degli strutturalisti intorno alla metà del Novecento. A volte l'informazione proviene addirittura da una completa ignoranza. Se non si ha nessun motivo per privilegiare alcuna di N diverse ipotesi, il cosiddetto principio di indifferenza autorizza un soggetto razionale ad assegnare a priori a ciascuna di queste ipotesi una probabilità pari a 1/N, senza necessità di condurre nessuna osservazione pratica. Certo, un dado può essere truccato, ed allora, se lo sospettiamo, non c'è motivo di considerare equiprobabili le sei facce. In tal caso il principio di indifferenza non può essere usato. I casi sono sì ancora 6, ma non sono più equiprobabili e quindi la definizione classica di probabilità non è di alcun aiuto. Allora sì che si è costretti ad adottare la cautela dell'approccio frequentistico, cioè ad aspettare di aver fatto molti esperimenti prima di pronunciarsi sul valore della probabilità dell'evento. Adottare questa cautela quando non v'è motivo, è d'altro canto una auto-limitazione troppo drastica, che invece di arricchire ed estendere il concetto di probabilità lo impoverisce declassandolo in tutti i casi al rango di una frequenza relativa, per giunta mai misurabile esattamente per sua stessa definizione.

Torniamo ora all'obiezione n. 2. Come valutare una probabilità quando i casi possibili non sono in numero finito? Se i casi favorevoli sono in numero finito, il problema non esiste. Un numero finito diviso un numero infinito dà zero. Per esempio la probabilità, scegliendo a caso un intero positivo, che si tratti di un numero inferiore a 1000, è zero. Ma che fare se anche i casi favorevoli sono in numero infinito? L'esempio dei multipli di 5 in realtà comporta qualche sottigliezza. Il numero dei casi favorevoli è infinito. Ora si potrebbe sostenere che la probabilità in questione è 1, cioe 100%, perché i casi favorevoli sono dello stesso numero dei casi possibili. Difatti, se si prendono tutti i multipli di 5 e si divide ciascuno per 5, si riottiene la successione di tutti i numeri naturali: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….

Questo ovviamente non è un caso isolato. Esiste un teorema che dice che ogni insieme infinito può mettersi in corrispondenza biunivoca con qualche suo sottoinsieme. A volte questa viene assunta come la definizione di insieme infinito. Il modo corretto per rispondere alla domanda posta è però un altro. Consideriamo una stringa finita fatta dei primi N numeri naturali: 1, 2, 3, 4, 5, 6,…., N. Abbiamo N casi possibili e circa N/5 casi favorevoli, l'approssimazione essendo tanto più precisa quanto più N è grande. Al tendere di N all'infinito il rapporto fra casi favorevoli e casi possibili tende esattamente a 1/5, numero che esprime il valore della densità dei multipli di 5 nell'insieme dei numeri naturali. Questo è allo stesso tempo il valore della probabilità dell'evento considerato, stando all'unico senso ragionevole che può ad essa attribuirsi. Consideriamo ora il problema dell'ago libero di ruotare nel cerchio (si intende che un'estremità dell'ago sia imperniata nel centro del cerchio). Qual è la probabilità che l'ago si fermi in un settore qualunque, ad esempio ampio 23 gradi? Qui, se prendessimo per casi possibili ed equiprobabili tutti i punti della circonferenza e per casi favorevoli tutti i punti dell'arco che delimita il settore dato, avremmo un'infinità di casi possibili e un'infinità di casi favorevoli. Ora risulta intuitivo superare questa difficoltà facendo ricorso al concetto di misura di un insieme fatto di infiniti elementi. La misura dell'intero cerchio, intesa come angolo, è 360 gradi, mentre la misura del settore è di 23 gradi. Inoltre tutti i settori comunque piccoli ma di uguale ampiezza sono equiprobabili, almeno fino a prova contraria. Quindi viene spontaneo valutare la probabilità richiesta col rapporto 23/360=6.39%. Ciò equivale in realtà ad estendere la definizione classica come segue:

Probabilità = misura della totalità dei casi favorevoli / misura della totalità dei casi possibili a patto che, se due insiemi (anche infiniti) di casi hanno la stessa misura, comunque piccola, gli eventi corrispondenti siano equiprobabili. Questa estensione, che fa intervenire il concetto di misura di una totalità di casi o, il che è lo stesso, di un insieme di punti (contenuto in un universo ben definito), è l'idea basilare a fondamento della generalizzazione del concetto di probabilità che caratterizza l'approccio della cosiddetta **scuola assiomatica**. Questo punto di vista è stato presentato per la prima volta in forma coerente e sistematica da Kolmogorov nel 1933 e resta tuttora l'approccio deduttivo più soddisfacente alla definizione e all'uso del concetto di probabilità. Esso parte da tre definizioni e due assiomi, dai quali è possibile dedurre tutti gli altri risultati, introdurre tutte le altre definizioni utili e calcolare ogni altro valore di probabilità cui si possa essere interessati. Innanzitutto si definisce *prova* l'esecuzione di un esperimento aleatorio dotato di un carattere di ripetibilità, nel senso che esso può essere eseguito o osservato ripetutamente senza che si alterino le condizioni che ne determinano l'esito. Una prova è ad esempio il lancio di un dado o l'estrazione di una pallina da un'urna o la rotazione casuale dell'ago dentro il cerchio fino al suo arresto. Una prova genera un insieme di esiti possibili. La totalità di questi esiti definisce l'*universo* ambiente. Questo va inteso come un insieme o uno spazio i cui punti sono tutti e soli gli esiti possibili di una prova, e sono detti anche eventi elementari. Di solito, un esito può essere caratterizzato associandogli uno o più numeri. Per esempio se si lanciano 3 dadi, ci sono 6x6x6 esiti possibili, quindi l'universo è costituito da 216 punti, ognuno dei quali è caratterizzabile in modo biunivoco con una terna di numeri interi (a,b,c), ciascuno compreso fra 1 e 6, dove a indica il numero uscito sul primo dado, b quello uscito sul secondo, c quello sul terzo. A questo punto si definisce *evento* un qualsiasi sottoinsieme dell'universo (in realtà per universi infiniti occorre limitarsi a una certa collezione di sottoinsiemi, che sia dotata della proprietà di costituire una sigma-algebra, ma qui questi dettagli non ci interessano). Infine si introduce una funzione d'insieme che ha le proprietà di una *misura*, si introduce cioè una regola per associare ad ogni sottoinsieme E (ben fatto) dell'universo U un numero P(E), non negativo, che goda delle seguenti proprietà (si pensi all'area di figure su un piano):

1) la misura dell'universo è 1: P(U)=1

2) se due eventi sono incompatibili (insiemi disgiunti), la misura della loro unione è la somma delle rispettive misure: AÇB =Æ Þ P(A È B) = P(A)+P(B), e lo stesso vale per un'infinità di eventi a due a due incompatibili.

La probabilità di un evento E viene definita ora come la misura dell'insieme corrispondente, cioè P(E). Da queste definizioni e assiomi si può derivare tutto ciò che serve. La prima cosa che si dimostra, per esempio, è che la misura dell'insieme vuoto è zero (cioè una prova, per sua definizione, un qualche esito lo deve pur avere), e, più in generale, che la misura dell'insieme complementare a E è 1 – P(E), vale a dire, se un evento ha probabilità 30%, l'evento contrario ha probabilità 70%.

Il successo della teoria assiomatica risiede nella possibilità di assimilare gli eventi a insiemi misurabili. Questo consente di usare l'armamentario matematico già sviluppato per la teoria generale degli insiemi per dedurre elegantemente e rapidamente tutte le proprietà implicate dal concetto di probabilità. L'assimilazione di eventi a insiemi si può fare perché tutte le relazioni significative fra eventi che ci interessano sono traducibili come relazioni fra insiemi e viceversa. Per esempio due eventi incompatibili corrispondono a due insiemi che non hanno punti in comune, cioè disgiunti; il verificarsi simultaneo di due eventi è un evento ben descritto dall'insieme intersezione dei due insiemi corrispondenti; il verificarsi dell'uno o dell'altro di due eventi è un evento ben descritto dall'insieme unione dei due insiemi corrispondenti; il fatto che un insieme A sia contenuto in un altro B equivale al fatto che il verificarsi dell'evento A comporta automatica-mente il verificarsi di B (ma non necessariamente il viceversa), e così via.

Si noterà che la definizione assiomatica di probabilità, come ogni buona teoria matematica, prescinde totalmente dal significato del termine probabilità. A questo proposito è bene ricordare la famosa definizione che Bertrand Russell diede di tutta la matematica come “la scienza in cui non si sa di che si parla nè se quel che si dice è vero”. La definizione assiomatica di probabilità lascia a voi la responsabilità di assegnare in modo sensato la misura ai vari eventi. Se tale assegnazione rispecchia la realtà, tutte le conclusioni che si traggono dalla teoria saranno vere, altrimenti non serviranno a nulla. In ogni caso, il controllo di validità non è compito del calcolo delle probabilità. Questo compito appartiene alla statistica, che combina un uso continuo e pesante del calcolo delle probabilità con l’analisi dei fatti osservati, al fine di accertare se questi ultimi avvengono conformemente alle assunzioni fatte circa la misura (o probabilità) introdotta nell’universo degli eventi. Il calcolo della probabilità è una teoria deduttiva. La statistica è una scienza induttiva. Senza il primo, la seconda sarebbe disarmata, ma senza quest’ultima il primo si ridurrebbe a uno sterile esercizio.

Esaminiamo ora due aspetti di questo approccio assiomatico. L’esperimento di cui si parla nella definizione assiomatica di probabilità, da cui origina il concetto di prova e, quindi, di universo degli eventi, si è pattuito che sia aleatorio e ripetibile. Il paradosso di Bertrand nasce da una critica all’uso ambiguo dell’attributo “aleatorio”. La scuola soggettivistica nasce da una critica molto più sostanziale alla necessità dell’attributo “ripetibile”.

Vediamo prima il **paradosso di Bertrand**. Quando si dice che un esperimento ha un esito casuale, possiamo voler dire cose diverse. Un’accezione, la più debole, implica che, comunque si esaminino le circostanze che lo accompagnano, risulta impossibile prevedere con certezza quale dei suoi vari esiti possibili si produrrà. Un’accezione più forte consiste nell’aggiungere la condizione che ogni esito dell’esperimento è tanto probabile quanto qualsiasi altro. Se estraiamo “a caso” una carta da un mazzo, con tutta probabilità intendiamo l’accezione forte. Se estraiamo “a caso” una lettera dell’alfabeto da un testo di italiano, non presupponiamo invece che la lettera “e” sia altrettanto probabile della lettera “z”. E’ bene quindi precisare, quando si usa l’espressione “a caso” o una simile, chiarire esattamente le operazioni che si compiono per eseguire l’esperimento aleatorio. Difatti, due soggetti, pur avendo entrambi in mente l’accezione forte del termine “casuale”, potrebbero avere in mente procedimenti diversi che portano a stime di probabilità differenti per lo stesso evento. Un esempio che chiarisce bene questa sottile ambiguità insita nel termine “casuale” è il seguente problema che apparentemente può essere risolto in diversi modi, ognuno impeccabile, ma ognuno con una risposta diversa.

“Si traccia a caso una corda in un cerchio di raggio r. Qual è la probabilità che la corda sia più lunga del lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio dato?”

Si possono esibire almeno quattro modi (e ce ne sono anche altri) per tracciare a caso una corda, e ognuno risponde alla percezione intuitiva che abbiamo circa il significato della locuzione “traccia-mento casuale di una corda”.

Un primo modo è scegliere un punto qualsiasi sulla circonferenza e, fissato questo come primo estremo della corda, scegliere il secondo estremo facendo ruotare casualmente un ago imperniato al centro del cerchio, che al suo arresto indicherà un altro punto della circonferenza, da prendere come il secondo estremo della corda.

Un secondo modo è, fermo restando il modo di scegliere il primo estremo della corda, scegliere il secondo estremo facendo ruotare l'ago non attorno al centro del cerchio ma attorno al primo estremo. Quando l'ago si sarà fermato, la retta che contiene l'ago intersecherà la circonferenza data in un solo punto, che sarà il secondo estremo della corda.

Un terzo modo consiste nel prendere a caso (accezione forte) un numero L compreso fra zero e la lunghezza del raggio e nel far ruotare un ago di lunghezza L attorno al centro del cerchio. La punta libera dell'ago si fermerà in un punto del cerchio, per il quale si condurrà la retta perpendicolare all'ago. Questa individuerà sul cerchio la corda casuale cercata.

Un quarto modo consiste nello scegliere a caso (accezione forte) un numero A compreso fra zero e l'area del cerchio e nel tracciare un cerchio di area A concentrico a quello dato. Si traccia poi la retta tangente al cerchio di area A in un punto qualsiasi della sua circonferenza. Tale retta taglierà una corda sul cerchio originario.

Ora, se si fanno i conti nei quattro casi, nei primi due la risposta viene uguale a 1/3, nel terzo viene uguale a 1/2, nel quarto viene uguale a 1/4. Questa pluralità di risposte è paradossale. Solo una dovrebbe essere quella giusta. Eppure il procedimento è ineccepibile in ognuno dei quattro casi. Dov'è l'errore? L'errore sta a monte, cioè nel pensare che basti dire "estrarre a caso" perché ogni soggetto razionale interpreti tale espressione in modo univoco. L'errore sta insomma nell'ambiguità insita nella formulazione linguistica del problema. Occorre specificare con maggiore precisione il modo con cui si deve procedere nell'estrazione casuale. Ognuno dei quattro modi indicati è perfettamente legittimo come metodo di estrazione casuale di una corda e, a seconda di quale metodo si usi, la risposta trovata è quella giusta. Il paradosso di Bertrand non ha quindi una soluzione univoca. Esso illustra il pericolo di un uso troppo leggero dei termini e mostra in modo esemplare come sia privo di senso parlare di probabilità di un evento, qualora l'esperimento aleatorio di cui si parla nella definizione assiomatica non sia stato chiaramente specificato.

Esaminiamo infine la critica della scuola **soggettivistica** alle altre definizioni di probabilità. La nascita di questo approccio si deve al lavoro svolto indipendentemente dal logico inglese Frank Ramsey e dal matematico italiano Bruno de Finetti. Ammettiamo di chiederci la probabilità che:

a) domani piova

b) l'Ulivo vinca le elezioni del 13 maggio

c) la Roma vinca lo scudetto dell'attuale campionato

d) il prossimo papa non sia europeo

e) le quotazioni della azioni FIAT a fine anno valgano la metà di adesso

A tutte queste domande non si riesce ad associare un esperimento aleatorio che sia **ripetibile**. Quindi il metodo assiomatico non è in grado dare risposte. Per lo stesso motivo fallisce il metodo frequentistico, a meno di farne un uso completamente scorretto (per es.: in passato la Roma ha vinto solo 3 scudetti sui 60 campionati di calcio cui ha partecipato, quindi ha solo una probabilità del 5% di vincere quest'anno lo scudetto! Oppure: non c'è mai stato un papa che non sia europeo, quindi la probabilità che il successore di Woytila sia non europeo è nulla).

La conclusione di chi aderisca alla scuola assiomatica o alla scuola frequentistica è pertanto la stessa, e cioè che per i problemi (a)-(e) non si possa parlare di probabilità, se mai di plausibilità di un evento, e che tale plausibilità non possa essere misurata quantitativamente senza cadere in seri errori.

Al contrario i sostenitori del punto di vista soggettivistico definiscono provocatoriamente :

"Probabilità di un evento è la massima somma di denaro che un soggetto razionale è disposto a scommettere a fronte di una vincita lorda unitaria".

Per esempio, se si lancia un dado, un soggetto razionale cui si prospetti una vincita lorda di un milione nel caso che esca il 6, non dovrebbe accettare di versare una posta maggiore della sesta parte di un milione per entrare nella scommessa, quindi 1/6 è la probabilità dell'evento dato. Questa definizione alquanto spregiudicata di probabilità in realtà non è in contrasto con le due precedenti ma le supera e le sussume entrambe. In sostanza essa non pone limiti, oltre alla richiesta di razionalità del soggetto, sul modo in cui si perviene ad un'assegnazione di probabilità agli eventi elementari. In particolare non richiede che l'evento in questione sia dotato di ripetibilità. E' ovvio che nei casi in cui si applica il metodo classico (cioè speculativo) o frequentistico, la valutazione sarà la stessa. Ma quando entrambi falliscono, per esempio a causa della non ripetibilità dell'evento in questione, talora l'informazione disponibile sulle circostanze che precedono l'evento, consente al soggettivista ugualmente di esprimere quantitativamente, sebbene con un grado di approssimazione più o meno alto, il grado di fiducia che ripone nel verificarsi del dato evento. A riprova di ciò si noti che tutti e cinque gli eventi su elencati, tranne il primo, sono oggetto di scommesse presso i bookmakers professionisti che da vari decenni esercitano la loro attività traendo lauti profitti dalle loro stime soggettivistiche di probabilità. L'approccio soggettivistico non è in realtà alternativo all'approccio assiomatico: una volta assegnate le probabilità basilari agli eventi elementari, il resto segue automaticamente come nel metodo assiomatico. L'unica differenza sta nel fatto che nei casi in cui la natura dell'esperimento aleatorio esclude la ripetibilità, l'universo degli eventi è, per così dire, puramente ipotetico, invece che concretamente generabile dagli esiti delle prove ripetute. Di tali prove se ne potrà fare in realtà solo una nel corso di tutta l'esistenza del cosmo, ma ciò non toglie la possibilità che un soggetto razionale, sulla scorta di un certa quantità di informazione acquisita non importa come, possa trovare vantaggiosa una scommessa che in caso di successo paghi 1 a fronte di una posta per esempio di 0.34.

Quanto poi al controllo degli assunti fatti, qualunque sia il punto di vista che si adotta, resta sempre imperativo il dovere di confrontare le proprie previsioni con le osservazioni fattuali future. La parola finale spetterà dunque in ogni caso all'analisi statistica . Allora perché accettare a priori inutili restrizioni sulla natura dell'esperimento aleatorio o più in generale sul metodo di assumere la distribuzione iniziale di probabilità per gli eventi elementari? Anche se l'esperimento aleatorio non fosse ripetibile, un soggetto razionale può trovarsi nelle condizioni di poter fornire una buona stima quantitativa della probabilità dell'evento. In realtà, ognuno di noi ogni giorno fa decine di valutazioni del genere, per esempio quando decide se prendere o no l'ombrello uscendo di casa, se prendere il raccordo o tagliare per il centro, se investire i risparmi in buoni del tesoro o in azioni, se ritenere colpevole o innocente l'imputato di un processo, a quale ora uscire per arrivare puntuale ad un appuntamento, quale partito votare, quale carriera di lavoro intraprendere o a che tipo di scuola iscrivere i propri figli. Tutte queste scelte riguardano eventi unici, irripetibili, eppure l'uomo medio non se la cava poi così male nel prendere decisioni ragionevoli in tutti questi casi (tranne forse nel caso del gioco in Borsa). Potremmo dire quindi che, se non altro grazie alla pressione selettiva subita durante l'evoluzione, il nostro cervello è stato costretto ad elaborare dei metodi efficaci per valutare la probabilità di eventi futuri da cui può dipendere la nostra sopravvivenza. Se questa capacità esiste, perché vietarsene per principio l'uso? Tanto vale metterla alla prova, quando non si ha niente di meglio, ed affidare alle verifiche a posteriori la conferma della nostra presunta efficienza nel fare previsioni. Tutto sommato, una conoscenza approssimata e soggettiva dei fatti è in genere meglio che il non conoscerli affatto, specialmente nei casi (e sono tanti) in cui si scopre che i risultati finali del calcolo (cioè le probabilità derivate, che serviranno a prendere le decisioni) sono in fin dei conti poco influenzati dai valori iniziali che il soggetto ha dovuto assegnare alle probabilità elementari, da cui il calcolo stesso dipende. In questi casi, casi che sarebbero stati respinti *tout cours* come non matemazzibili nell'ambito degli altri approcci, l'approccio soggettivistico ha avuto il merito (e il coraggio) di applicare ugualmente i metodi di calcolo quantitativi, così consentendo per un verso scoperte interessanti che non si sarebbero altrimenti mai fatte, e per l'altro verso fondando a posteriori le ragioni della propria validità e fecondità.

BIBLIOGRAFIA

Feller W. , 1957 : *An introduction to probability theory and its applications - Vol. 1*. J.Wiley & Sons, 3rd edition.

Von Mises R., 1936 : *Wahrsceinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, Springer-Verlag, Vienna.

Papoulis A., 1965: *Probability, random variables and stochastic processes,* McGraw-Hill (traduz. italiana di M. Bozzini e R. Tirani, Boringhieri, 1973), Capitolo 1.

Davenport W.B., 1970 : *Probability and random processes*. McGraw-Hill, 542 pp. (Capp. 1-3).

Kolmogorov A.N., 1956 : Foundations of the theory of probability. Chelsea Pub. Co. , New York (traduz. in inglese di un articolo apparso nel 1933 sulla rivista tedesca Ergebn. Math, vol. 2)

Ramsey, F.P. , 1931 : in *The foundations of mathematics and other logical essays* (a cura di R.B. Braitwaite). Routledge & Keagan, London. Traduzione italiana: *Verità e probabilità: I fondamenti della matematica e altri scritti di logica*. Feltrinelli (Milano, 1964)

De Finetti B., 1989 : *La logica dell'incerto*. Mondadori, Il Saggiatore (Milano)

LEZIONE 3
Le leggi della probabilità e la combinazione di eventi. Eventi incompatibili, indipendenti e non. Eventi condizionati e la formula di Bayes

Nella lezione precedente si è introdotta la nozione di *esperimento aleatorio* e di *prova*, quest'ultima definita come un'esecuzione del primo, e infine di *evento elementare* come di uno dei possibili esiti semplici di una prova. E' il caso ora di approfondire questi concetti. Un esperimento aleatorio non consiste unicamente nella scelta di un meccanismo aleatorio, ma anche nella prescrizione di ben precise modalità d'uso dello stesso, cioè di un protocollo rigido che va scrupolosamente ripetuto dall'inizio alla fine ad ogni prova. Un meccanismo aleatorio è un sistema fisico, come un dado, un'urna, un dado, il cestello ruotante del lotto con le 90 sfere, una roulette, un mazzo di carte o un materiale radioattivo, in grado di produrre una serie di eventi che hanno la caratteristica di non essere esattamente prevedibili. Un meccanismo aleatorio di per sé è una condizione necessaria per l'esistenza di un esperimento aleatorio, ma non sufficiente. La prescrizione di un procedimento rituale che detti l'uso del meccanismo è il secondo ingrediente essenziale per la definizione completa di un esperimento aleatorio. Due esperimenti aleatori possono infatti basarsi sullo stesso meccanismo aleatorio ed essere completamente diversi. Per esempio un semplice dado può essere lanciato una volta sola, due volte, o lanciato fino a che non si ottengano due 6 consecutivi. Nei tre casi il meccanismo aleatorio è lo stesso ma è diversa la definizione di prova. Nel primo caso una prova consisterà in un singolo lancio del dado e i possibili esiti sono 6 e sono tutti equiprobabili. Nel secondo caso il dado va lanciato due volte e i possibili esiti sono 36, ancora tutti equiprobabili. Nel terzo caso una prova consisterà in una serie di lanci di lunghezza non predeterminata che ha fine solo quando due lanci consecutivi mostrano lo stesso esito, il numero 6. In questo caso la prova ha un'infinità di possibili esiti, non tutti equiprobabili.Si può fare un altro esempio che implica l'uso della roulette: un esperimento aleatorio può consistere nel far funzionare la roulette 10 volte di seguito, un altro nel continuare fino a che non compaia lo zero, un altro ancora nel continuare fino a che non si ottengano tanti "rouge" che "noir". E così via. Ricordiamo ora che è stato definito *universo degli eventi* la totalità degli esiti semplici possibili di una prova, ed *evento* un qualsiasi sottoinsieme dell'universo. Si vede quindi che la definizione di evento è strettamente legata alla natura della prova, perciò sia il significato di un evento che le relazioni fra esso e gli altri eventi dipendono fortemente dal contesto operativo con cui si fissano le modalità della prova. Come si vedrà fra breve, due eventi basati sul lancio di un dado, come "esce il 6" e "esce il 3", possono essere fra loro incompatibili o, al contrario, indipendenti, a seconda di come sia stata definita la prova che caratterizza il dato esperimento aleatorio. Si noti poi che un esperimento aleatorio può coinvolgere l'impiego di più meccanismi aleatori, come ad esempio due dadi, un dado e una roulette, una moneta e un mazzo di carte, ma, fissati questi, resta ovviamente infinita la possibilità di prove che si possono definire usando i vari meccanismi aleatori coinvolti. Viceversa, due esperimenti aleatori, pur usando diversi meccanismi aleatori o un numero diverso di essi, e pur essendo le relative prove definite secondo protocolli diversi, possono risultare identici. Questo accade quando c'è una corrispondenza isomorfa fra i relativi universi degli eventi, cioè quando non solo c'è corrispondenza biunivoca fra i rispettivi eventi elementari (cioè gli esiti semplici della prova) ma accade anche che insiemi comunque scelti di questi ultimi (cioè eventi) fra loro corrispondenti abbiano la stessa misura (leggi, probabilità). E' il caso per esempio della prova definita come "lancia due volte di seguito un dado", oppure "lancia simultaneamente due dadi". Quando due esperimenti aleatori sono identici, è solo questione di gusto ragionare in un ambito semantico o nell'altro. Sta di fatto che qualsiasi esperimento aleatorio che generi un universo <u>discreto</u> di eventi è identico ad un esperimento aleatorio che usi come meccanismo un'urna riempita con palle di diverso colore, o ad un esperimento che consista nel disporre a caso N palle in M buche.
Si noti infine che la procedura che definisce una prova deve o attribuire a priori una certa probabilità ad ogni esito della stessa o fornire sufficienti indicazioni per consentire a un soggetto razionale di assegnare la suddetta distribuzione di probabilità fra ciascuno degli esiti possibili.

Una volta assegnate o determinate tali probabilità elementari, sorge il problema di calcolare la probabilità di un qualsiasi evento composito che possa essere associato dalla stessa prova. Per esempio, se sappiamo che ogni faccia di un dado ha probabilità 1/6, dovremmo essere in grado di calcolare che la probabilità di ottenere un numero dispari è uguale al 50%, oppure che, lanciando due dadi, la probabilità che la somma delle due facce superi 6 è 21/36, cioè circa 58,3%. Questo è appunto lo scopo del calcolo delle probabilità. Non si mette per ora in discussione l'assegnazione iniziale di probabilità agli eventi elementari (questo sarà compito dell'analisi statistica). Si presume che essa sia stata fatta correttamente e si procede a dedurne tutte le conseguenze, cioè a calcolare tutte le probabilità che ci possono interessare. Queste probabilità si riferiscono di norma agli eventi che possono ottenersi come combinazioni o associazioni degli eventi elementari. Gli strumenti per portare a termine tale compito, spesso non banale, sono alcune leggi la cui enunciazione richiede la previa introduzione di alcune definizioni, che evidenzino le relazioni possibili fra due o più eventi qualsiasi.
Innanzi tutto, introduciamo una notazione abbreviata. Se A e B sono due eventi, allora indicheremo con

AB l'evento che corrisponde al verificarsi simultaneo di A e B
A+B l'evento che corrisponde al verificarsi o di A o di B (eventualmente di entrambi)
A – B l'evento corrisponde al verificarsi di A ma non di B
A|B l'evento che si verifichi A, ammesso che si sia già verificato B
¬A l'evento contrario di A, detto anche evento **complementare** di A

Si noti che le prime due notazioni si estendono naturalmente ad un numero qualsiasi di eventi.

RELAZIONI FONDAMENTALI FRA EVENTI: CLASSIFICAZIONE

Due eventi si dicono **incompatibili** se si escludono a vicenda, cioè se il verificarsi dell'uno rende impossibile il verificarsi dell'altro. Si noti che un evento A non può escludere il verificarsi di B, senza che accada il viceversa. Ciò dipende da una regola di logica, detta *modus tollendo tollens*: se A implica non-B, allora B implica non-A, la cui dimostrazione di consegue immediatamente *per absurdum* invocando il principio di non contraddizione: o B o non-B, ma non emtrambi! Un esempio di eventi incompatibili è "maschio" e "femmina" per il sesso di un nascituro, oppure due diversi esiti per lo stesso lancio di un dado, oppure "testa" e "croce" in un dato lancio di una moneta. Più in generale, N eventi si diranno incompatibili se il verificarsi di uno di essi esclude la possibilità che si verifichi qualsiasi altro. Ne segue che N eventi incompatibili saranno anche necessariamente a due a due incompatibili, e viceversa. Se due eventi non sono incompatibili, essi si diranno **compatibili**. In tal caso i due eventi possono verificarsi simultaneamente.

Due eventi si dicono **indipendenti** se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità che si verifichi l'altro. Anche in questo caso, per quanto meno intuitivo, vale la proprietà simmetrica, cioè l'indipendenza di un evento A da un evento B implica anche l'indipendenza di B da A. Se due eventi non sono indipendenti, essi si diranno **dipendenti**. Un esempio di eventi indipendenti si ha quando si lanciano due monete o due dadi: l'esito testa o croce sulla prima moneta non altera la probabilità di testa o croce sulla seconda, e così dicasi per l'esito che compare sull'uno e l'altro dado. Un altro esempio è l'evento "esce una carta di fiori" e l'evento "esce una figura, cioè un J, un Q o un K" quando si estrae a caso una carta da un mazzo di 52 carte francesi. Infatti, prima di pescare la carta, la probabilità che esca una figura è 12/52=3/13, poichè 12 sono le figure (casi favorevoli) e 52 le carte (casi possibili); se ammettiamo ora di sapere che la carta pescata è una carta di fiori (cioè il primo evento si è verificato) e proviamo a ricalcolare in base a questa informazione qual è la probabilità che quella carta sia anche una figura, il calcolo dei casi favorevoli e di quelli possibili restituisce ancora un valore pari a 3/13. Insomma la probabilità di estrarre una figura dal mazzo non è alterata dal fatto che si sia già verificato il primo evento. Lo stesso vale scambiando i due eventi: che si sappia o no se la carta estratta è una figura, la probabilità di estrarre una fiori resta sempre ¼ , per cui i due eventi considerati

sono indipendenti. Basta invece aggiungere uno o entrambi i jolly al mazzo di carte per distruggere questa indipendenza. Infatti, in presenza ad esempio dei due jolly, la probabilità di pescare una figura è 12/54=2/9, ma, dopo aver appreso che la carta pescata è una carta di fiori, tale probabilità sale da 2/9 = 22,2% a 1/4 = 25%. Quindi gli stessi eventi di prima risultano dipendenti. La ragione di ciò che è cambiato l'esperimento aleatorio (per la precisione è cambiato il meccanismo aleatorio) e quindi solo in superficie si sta parlando degli "stessi" eventi di prima.
L'esempio precedente porta immediatamente a una presa di coscienza importante. La probabilità di un evento dipende in genere dall'informazione rilevante che si ha a disposizione. Prima di sapere che la carta pescata è una fiori, la probabilità di pescare una figura è 2/9, ma, dopo aver avuto accesso all'informazione supplementare, è doveroso ricalcolare la probabilità dello "stesso" evento. In realtà non si tratta dello stesso evento, ma di un evento condizionato dal fatto che ne sia accaduto un altro. Questo ci porta alla successiva importante definizione, cioè la definizione di eventi **condizionati**.
L'evento A|B, leggasi "A condizionato a B", è definito come l'evento che consiste nel verificarsi di A a patto che si sia verificato già B. Per esempio, nel lancio di un dado, se l'evento A è l'uscita del 6 e l'evento B consiste nell'uscita di un numero pari, la probabilità P(A|B) è pari a 1/3 dal momento che, se sappiamo che il numero uscito sul dado è pari, restano solo 3 casi possibili dei 6 originari. Inoltre la probabilità P(B|A) è 1, perché, se si sa che è uscito un 6, è ormai certo che il numero uscito è un numero pari.
Usando la definizione di eventi condizionati, la definizione di indipendenza fra due eventi A e B equivale a richiedere che sia P(A)=P(A|B), ovvero che P(B)=P(B|A). L'una delle due uguaglianze implica l'altra, anche se la cosa non appare intuitiva (sarà dimostrata più oltre).
Se si desidera estendere la nozione di indipendenza a N eventi, occorre tenere presente che, al contrario di quanto accade per gli eventi incompatibili, se la proprietà in questione vale per gli N eventi, presi a due a due, ciò non comporta che essa valga in un senso più globale. Si possono cioè avere 3 eventi A, B e C, tali che A è indipendente da B, B lo è da C e C lo è da A, ma A non è indipendente dall'evento BC, cioè dal verificarsi simultaneo di B e C. Facciamo un esempio concreto basato sulle cartteristiche di un neonato. A sia "maschio", B sia "gruppo sanguigno 0", C sia "maschio con gruppo 0 oppure femmina con gruppo diverso da 0". Ora il fatto che un individuo sia maschio non influenza la sua probabilità di avere gruppo sanguigno 0 (almeno per quanto ne so). Quindi A e B sono indipendenti. Supponiamo ora che la probabilità di essere maschio sia esattamente ½ e così pure per la probabilità che un neonato abbia 0 come gruppo sanguigno (cose entrambe non vere). In tal caso anche la probabilità di C è uguale a ½, dato che fra i 4 casi possibili, tutti equiprobabili, due sono favorevoli a C. Inoltre sapere che un neonato è maschio non cambia la probabilità di C, perché si può sì escludere l'eventualità che si tratti di una femmina ma la richiesta che quel maschio sia di gruppo 0 è ancora ½, come prima di conoscerne il sesso. Quindi A e C sono eventi indipendenti. Lo stesso dicasi per B e C: infatti sapere che il gruppo sanguigno di un neonato è 0 lascia per l'evento C solo la possibilità che si tratti di un maschio, ma tale possibilità ha ancora probabilità ½. Insomma A, B e C sono a 2 a 2 eventi indipendenti. Ma essi non sono tra loro indipendenti in senso lato, come si vede facilmente calcolando la probabilità di C, condizionata al fatto che si siano verificati sia A che B. Se A e B sono entrambi veri, allora C è un evento certo perché almeno una delle due eventualità da esso previste si è verificata, in altri termini si ha P(C!AB) = 1, e quindi la probabilità di C sale da ½ a 1 se si sa che sia A che B si sono verificati. Se ne conclude che C, per quanto indipendente da A e da B separatamente, non è indipendente dal loro simultaneo verificarsi. Non sembra quindi ragionevole affermare che A, B e C sono tre eventi mutuamente indipendenti.
Conviene quindi adottare la seguente definizione di **indipendenza per N eventi**: N eventi sono fra loro indipendenti quando la probabilità di ciascuno di essi non è alterata dal fatto che si sia verificato un numero qualsiasi dei restanti eventi.
Concludiamo con alcune osservazioni banali, rese però necessarie dalla frequenza con cui i principianti tendono a confondere eventi indipendenti con eventi incompatibili. In quel che segue prescindiamo dal caso limite e banale di eventi che hanno, per loro stessa definizione, probabilità uguale a zero.
Due eventi indipendenti non sono mai incompatibili, perché l'incompatibilità, al contrario, è il caso di massima dipendenza fra due eventi, il caso cioè in cui il verificarsi di un evento azzera del tutto la

probabilità che si possa verificare l'altro. Se si lancia un dado una sola volta, non può uscire sia il 3 che il 6, e questi due eventi sono incompatibili. Il sapere che è uscito il 3 annulla la possibilità che **nello stesso lancio** possa essere uscito il 6. Purtroppo la confusione nasce quando si pensa al caso in cui si lanci due o più volte lo stesso dado (o che si lancino simultaneamente due o più dadi). In questo caso "l'uscita del 3 al primo lancio" e "l'uscita del 6 al secondo lancio" sono eventi indipendenti, perché normalmente le operazioni che si fanno quando si lancia ripetutamente un dado sono tali da rendere equiprobabili, ad ogni successivo lancio, tutte e sei le facce del dado. Questo esempio mostra l'importanza di utilizzare una formulazione linguistica non ambigua quando si definiscono uno o più eventi, altrimenti si potrebbe facilmente arrivare a conclusioni contraddittorie.
Viceversa, due eventi incompatibili non possono mai essere indipendenti, perchè se lo fossero, non potrebbe accadere che, dopo che si è verificato il primo evento, la probabilità del secondo si riduca a zero (come richiede l'incompatibilità), invece di restare la stessa di prima.
Ovviamente due eventi possono essere né incompatibili né indipendenti. Per esempio, se si lancia un dado una sola volta, l'uscita del 6 e l'uscita di un numero pari non sono eventi incompatibili, ma nemmeno indipendenti, perchè da un lato l'uscita di un numero pari non preclude la possibilità che si tratti proprio del 6, ma d'altro canto tale eventualità non ha più la stessa probabilità di prima, bensì doppia.

PROBABILITA' DELL'UNIONE DI PIU' EVENTI

Per **unione** di più eventi A, B, C, ... si intende l'evento A+B+C+ .... , cioè l'evento che corrisponde al verificarsi o di A o di B o di C etc., senza escludere che possano verificarsi anche più di uno degli eventi considerati. Ora, se gli eventi sono incompatibili, non è difficile intuire (o dimostrare) che la probabilità dell'unione di più eventi è semplicemente la somma delle probabilità dei singoli eventi, in formule:

(3.1) $$P(A+B+C+...) = P(A) + P(B) + P(C) + ...$$

Questa è la **legge della probabilità totale** nel caso di eventi incompatibili.
Se gli eventi non sono incompatibili, tale legge assume una forma più complicata:

(3.2) $$P(A+B+C+D+ ...) = S1 – S2 + S3 – ...$$

dove S1, S2, S3, ... sono delle somme di probabilità e più precisamente:
S1 = P(A)+P(B)+P(C)+P(D)+ ... è la somma delle probabilità di tutti gli eventi presi singolarmente
S2 = P(AB) + P(BC) + P(CA) + ... è la somma delle probabilità di tutte le possibili coppie di eventi
S3 = P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD) + ... è la somma su tutte le possibili terne di eventi
e così via.
Ora è chiaro che, se gli eventi sono incompatibili, S2=0, S3=0, S4=0 etc., dal momento che è impossibile, per definizione stessa di incompatibilità, che più eventi incompatibili si presentino in coppia e a maggior ragione a 3 a 3, a 4 a 4, e così via. Ciò spiega perchè la (3.1) si ottiene dalla (3.2) prendendo solo il primo addendo, cioè S1. Quando però gli eventi sono compatibili, in genere S1 è maggiore di 1, il che già mostra come sarebbe insensato applicare alla cieca la (3.1), dovendo la probabilità di un qualsiasi evento essere un numero compreso fra zero e uno.
La dimostrazione rigorosa della (3.2) si può fare usando il cosiddetto principio di induzione finita. Una sua comprensione adeguata si può tuttavia già ottenere, per esempio nel caso di 4 eventi A, B, C e D, sfruttando l'analogia con un problema di calcolo dell'area di una figura piana. Ammettiamo di sovrapporre in un modo qualsiasi 4 pezzi di carta, di forma e dimensioni qualunque, e si voglia calcolare l'area della figura che si è ottenuta sovrapponendoli. Se i 4 fogli sono solo accostati senza che nessuno copra l'altro, l'area totale è la somma delle 4 aree, il che equivale alla semplice formula (3.1). Se invece ci sono sovrapposizioni, allora il calcolo è più complicato, ma, esaminando con un po' di pazienza la figura, si può constatare che l'area totale è la somma delle 4 aree, meno le aree (eventualmente nulle) delle 6 zone formate dalla sovrapposizione (o, in linguaggio più tecnico, dall'intersezione) dei 4 pezzi di carta a due a due, più le aree delle 4 zone formate dalle triplici intersezioni, meno l'area della zona di sovrapposizione fra tutti e quattro, ammesso che ne esista una. Il motivo per cui la stessa legge vale sia per le aree di figure piane sovrapposte, sia per le probabilità di eventi compatibili è che, come assunto nell'approccio assiomatico (cfr. lezione 2):
- un evento va inteso come un insieme
- la sua probabilità va intesa come la misura dell' "estensione" di tale insieme all'interno di uno spazio la cui estensione totale è 1
- due eventi compatibili corrispondono a due insiemi che hanno una zona in comune, mentre due incompatibili corrispondono a insiemi disgiunti, cioè non aventi alcun punto in comune (intersezione vuota).

Questo implica che, se esiste una regola per il calcolo delle aree, allora spesso c'è una sua interpretazione utile anche nell'ambito del calcolo delle probabilità. E viceversa. Basterebbe già questo a mostrare la potenza e la fecondità del cosiddetto approccio assiomatico alla teoria della probabilità.
Facciamo ora qualche esempio.
1) Si estrae a caso un numero della tombola. Qual è la probabilità che esso sia o un multiplo di 7 o un multiplo di 13 ?. La probabilità che sia multiplo di 7 è 12/90, perchè fra 1 e 90 ci sono 12 numeri multipli di 7 (gli ultimi due sono 77 e 84). La probabilità che il numero estratto sia un multiplo di 13

è analogamente 6/90. Poichè entrambe le cose ci vanno bene, viene spontaneo sommare le due probabilità per avere la probabilità cercata. Ma, dobbiamo chiederci prima, i due eventi sono incompatibili? Ebbene sì, perchè il primo multiplo in comune di 7 e di 13 (cioè il loro m.c.m.) è 7x13=91, ma questo numero non esiste fra quelli possibili. Perciò il verificarsi del primo evento (che cioè il numero estratto sia multiplo di 7) esclude il verificarsi del secondo evento (cioè che possa trattarsi anche di un multiplo di 13). Pertanto la probabilità richiesta è , secondo la (3.1), la semplice somma delle due probabilità, cioè 18/90 = 1/5 = 20%.

2) Si estrae ancora un numero della tombola a caso e ci si chiede quale sia la probabilità che tale numero sia o multiplo di 3 o di 5 o di 9. Le probabilità dei tre eventi presi singolarmente sono rispettivamente 30/90, 18/90 e 10/90. Ma ora non possiamo sommare semplicemente questi tre numeri per avere la probabilità totale, perchè i tre eventi singoli considerati non sono fra loro incompatibili. Per esempio 15 è multiplo sia di 3 che di 5, mentre 45 è multiplo di tutti e tre. In altri termini, il verificarsi di uno dei tre eventi non esclude che si possa essere verificato anche un altro dei restanti due. Occorre quindi calcolare, oltre a S1=30/90 + 18/90 + 10/90 = 58/90, anche S2 ed S3. Ora i multipli comuni a 3 e a 5 fra 1 e 90 sono i multipli di 15 e sono sei in tutto, 15 compreso. I multipli comuni a 3 e a 9 sono i multipli di 9, che sono dieci in tutto. I multipli comuni a 5 e 9 sono solo due, 45 e 90. Pertanto S2 sarà uguale a (6+9+2)/90 = 17/90. Per calcolare S3 occorre ora contare quanti sono i multipli comuni a 3, 5 e 9: Questi coincidono con i multipli di 5 e 9, sono cioè due. Ne segue S3=2/90. Mettendo assieme i tre addendi S1, S2 e S3 come indicato dalla (3.2) si ottiene infine per la probabilità cercata: S1 – S2+S3 = (58 – 17+2)/90 = 43/90, cioè poco meno del 50%.
3) Il problema delle **coincidenze** è un po' più difficile. Questo problema ha molte varianti e una soluzione piuttosto controintuitiva. La sua prima formulazione pare risalga a un certo Montmort (1708) e da allora ricorre continuamente nella letteratura. Una semplice enunciazione è la seguente: da due mazzi di N carte ben mescolati e affiancati si scoprono simultaneamente la prima, la seconda, la terza carta di ciascun mazzo e così via, in cerca di due carte identiche. Un tale evento viene brevemente chiamato una *coincidenza* (*rencontre* in francese, *match* in inglese). Dopo aver scoperto tutte le carte dei due mazzi, si saranno osservate da 0 a N coincidenze. Qual è la probabilità di non avere neanche una coincidenza? Ovviamente la probabilità di averne almeno una è il complemento ad uno della prima.

Prima di risolvere il problema, vediamone altre formulazioni equivalenti.
Ci sono 50 persone che hanno lasciato il soprabito nel guardaroba di un teatro. Al momento di uscire dal teatro viene però a mancare la luce e il guardarobiere, nel buio più pesto, distribuisce a caso i soprabiti fra i loro proprietari. Qual è la probabilità che almeno uno ottenga il proprio?
Una segretaria innamorata, che deve spedire 20 lettere diverse a 20 destinatari, infila completamente a caso le lettere nelle 20 buste già predisposte con l'indirizzo. Qual è la probabilità che almeno un destinatario riceva la lettera giusta?
Un ciarlatano dichiara di saper indovinare i 90 numeri che verranno estratti durante una giocata a tombola e scrive su un foglietto la serie di 90 numeri, così come secondo lui usciranno durante l'estrazione. Qual è la probabilità che azzecchi almeno un numero?
Ebbene, la cosa sorprendente è che agli ultimi tre quesiti posti la risposta è sempre la stessa (circa il 63%), indipendente cioè dal numero di oggetti sui quali si osservano le coincidenze. Vediamo perchè.
Indichiamo con A_1 l'evento che ci sia una coincidenza alla prima carta (ma non necessariamente solo alla prima), con A_2 l'evento che ci sia una coincidenza alla seconda carta, e così via. L'evento di cui si vuole la probabilità è che ci sia almeno una coincidenza, cioè che si verifichi o A_1 o A_2 ..... o A_N. Se questi eventi fossero incompatibili basterebbe sommare, secondo la (3.1), le loro singole probabilità per ottenere la risposta. Ma questi eventi non sono incompatibili, perchè il fatto che si verifichi una coincidenza in un dato posto non esclude che se ne verifichi un'altra in un altro posto. Quindi, occorrerà innanzi tutto calcolare la probabilità del generico evento A_k , poi la probabilità della generica coppia di eventi A_jA_k con i diverso da k, la probabilità della generica terna $A_iA_jA_k$ con i, j e k diversi fra loro, e così via, dopodichè la formula da usare sarà la (3.2), non la (3.1). Il compito non è così difficile come può sembrare a prima vista, perchè le probabilità dei singoli eventi A_k sono tutte uguali fra loro, e

così pure quelle di ogni coppia, di ogni terna, etc. Calcoliamo prima la probabilità che si verifichi una coincidenza al k.mo posto, con k generico. Prendendo a riferimento la successione di carte in uno dei due mazzi, la successione di carte nel secondo mazzo può essere una qualsiasi delle N! permutazioni di quella. Quindi i casi possibili sono N! . Quanti di questi casi sono favorevoli? Sono tutte le permutazioni che lasciano fissata la carta che occupa il k.mo posto, cioè le permutazioni di N-1 oggetti, il cui numero è (N-1)!. La probabilità cercata è dunque (N-1)!/N! = 1/N, qualunque sia il posto k dove è stata forzata la coincidenza. La somma S1 nella (3.2) consta pertanto di N addendi tutti uguali a 1/N e vale 1.
Ora dobbiamo calcolare la somma S2, il che richiede che si calcoli la probabilità che si verifichino simultaneamente due eventi A_j e A_k con j e k arbitrari ma distinti, cioè la probabilità che si abbiano almeno 2 coincidenze, di cui una al j.mo posto e l'altra al k.mo posto. Ovviamente i casi possibili sono ancora N!, mentre i casi favorevoli sono le permutazioni degli N elementi che lasciano al loro posto 2 degli N elementi; sono cioè le permutazioni dei restanti N-2 elementi, il cui numero è (N-2)!. La probabilità cercata è (N-2)!/N!=1/[(N-1)(N-2)], ed è indipendente dalla scelta dei due posti j e k dove è stata forzata la coincidenza. Quindi per ottenere la somma S2 nella (3.2) basterà moltiplicare tale probabilità per il numero di volte che si possono prendere due posti qualsiasi fra gli N disponibili, cioè per il numero di combinazioni di N oggetti a 2 a 2. Questo numero è il coefficiente di Newton

$$\binom{N}{2} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!} = \frac{N(N-1)}{2!}$$

Moltiplicando per la probabilità di una coppia si ottiene : S2 = 1 / 2! .
Analogamente la probabilità di una terna qualsiasi di coincidenze forzate sarà (N-3)!/N!, ma esistono N!/[3!(N-3)!] combinazioni di N oggetti a 3 a 3, cioè modi di fissare i tre posti dove viene forzata la coincidenza, per cui S3 = 1/3!. E così via per S4, S5, etc. Applicando ora la (3.2) si ha per la probabilità totale cercata

$$P_{>0} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... \mp \frac{1}{N!}$$

dovendosi prendere nell'ultimo addendo il segno meno se N è pari, il segno più se N è dispari.
Per N=1 si ottiene ovviamente 1. Per N=2 si ottiene ½, cioè 50%. Per N=3 si ottiene 2/3. Per N=4 si ottiene 62.5%. Ovviamente se N è pari, il valore della probabilità è un po' minore sia che per il numero dispari precedente, sia che per il seguente, ma in breve, al crescere di N, tale valore tende ad un limite ben preciso. Il calcolo effettivo della formula per N qualsiasi si esegue facilmente disponendo di un computer, anche perchè la somma converge rapidamente (per N=10, l'ultimo termine della somma vale circa 0.0000002). Questo spiega perchè la suddetta probabilità dipende poco dal numero N di oggetti, se questo numero è superiore a 5. Difatti si ottiene comunque una risposta molto prossima al 63.2%. Il valore limite per N che tende a infinito è semplicemente (1 – 1/e), dove e indica il numero di Nepero. Questo semplice risultato è dovuto al fatto che, sviluppando in serie infinita di Taylor la funzione exp(x) per x =– 1, si ottiene una serie identica, nei suoi primi N termini, al valore della quantità $1 - P_{>0}$.

PROBABILITA' DELL'INTERSEZIONE DI PIU' EVENTI

Per **intersezione** di più eventi A, B, C, ... si intende l'evento ABC.... , cioè l'evento che corrisponde al verificarsi simultaneo in una stessa prova di A e di B e di C etc., cioè di tutti gli eventi considerati. Ora, se gli eventi in questione sono incompatibili, la probabilità che si verifichino contemporaneamente anche solo due di essi è zero. E' invece interessante il caso in cui gli eventi considerati siano compatibili e, più in particolare, indipendenti. Per semplicità consideriamo due soli eventi. Per esempio, si estrae un numero della tombola e ci si chiede la probabilità che il numero estratto sia multiplo sia di 7 che di 5. Questi eventi non sono incompatibili, dato che, ad esempio, 70 è multiplo sia di 7 che di 5. Ma sono questi due eventi indipendenti? No, perchè la probabilità che il numero estratto sia multiplo di 5 è a priori 18/90=1/5, ma, dopo aver appreso che tale numero è un multiplo di 7, rimangono solo due possibilità (35, 70) su dodici a favore del fatto che esso sia anche multiplo di 5. In altri termini, il verificarsi dell'evento "multiplo di 7" abbassa da 1/5 a 1/6 la probabilità dell'evento "multiplo di 5", il che mostra che i due eventi non sono fra loro indipendenti. Qual è ora la probabilità che entrambi gli eventi si verifichino? La risposta è: il prodotto di due probabilità, la probabilità che si verifichi il primo per la probabilità (modificata) che si verifichi il secondo, calcolata tenendo conto che il primo si è già verificato. In formule, usando la notazione introdotta, si ha cioè

(4.1) $$P(AB) = P(A)P(B \mid A)$$

dove ovviamente i ruoli degli eventi A e B possono essere scambiati, a seconda del gusto e/o della convenienza nel calcolo. Ora non è chiaro se la (4.1) vada inteso come un teorema da dimostrare o una definizione della quantità P(B|A), cioè della probabilità condizionata che si verifichi B a patto che si sia verificato A. Alcuni autori (es.: Feller, Vol.1, p. 115) usano questo secondo approccio, piuttosto formale, evitando così la difficoltà di giustificare quella che in realtà dovrebbe essere una legge dotata di senso. In questa sede, proverò a darne una dimostrazione convincente, valida almeno nel caso di un numero finito di casi possibili. Sia N il numero di questi, e fra questi sia N_A il numero di casi favorevoli ad A, N_B il numero di casi favorevoli a B, e N_{AB} il numero di casi favorevoli all'evento AB (cioè al concorso di A e B). Pertanto, per definizione di probabilità, si ha

$$P(A) = N_A/N \qquad \text{e} \qquad P(AB)=N_{AB}/N$$

Chiediamoci ora quale sia la probabilità che si verifichi B sapendo che A si sia già verificato. A questo punto i casi possibili rimasti, compatibili cioè con l'informazione ricevuta che A si è verificato, sono solo N_A, mentre i casi (rimasti) favorevoli al verificarsi di B sono, non più N_B, bensì N_{AB} . Pertanto la probabilità di B, condizionata ad A è ora

$$P(B|A) = N_{AB} / N_A = (N_{AB} / N)/(N_A/N) = P(AB)/P(A)$$

formula questa identica alla (4.1). La legge (4.1) resta così dimostrata <u>dopo</u> che si è attribuito un senso ben preciso all'evento B|A, evento che, si noti, non sempre è facilmente associabile ad un insieme ben determinato nel cosiddetto universo degli eventi, anche se ivi si sono ben individuati sia l'insieme che corrisponde ad A, sia quello corrispondente a B. L'alternativa che consiste nel presentare la (4.1) come una definizione richiede al contrario che l'evento B|A sia <u>definito</u> come l'evento la cui probabilità è data dalla (4.1) e che solo in un secondo momento si prenda atto che il suo significato coincida con quello di "un evento condizionato al verificarsi di un altro".
Possiamo ora rispondere al quesito posto all'inizio. Qual è la probabilità che un numero da 1 a 90 sia multiplo e di 7 e di 5. La probabilità che sia multiplo di 7 è 12/90, che sia multiplo di 5 è 18/90. La probabilità che sia multiplo sia di 5 sia di 7 è 2/90 (i casi favorevoli sono solo 35 e 70). Proviamo a calcolare per verifica questa probabilità usando la (4.1). La probabilità che sia multiplo di 5, ammesso che si tratti di un multiplo di 7, è, come già visto, pari a 1/6. Identificando l'evento A con "multiplo di 7" e l'evento B con "multiplo di 5" si ha dunque

$$P(AB)=(12/90)(1/6) = 2/90$$

come doveva essere.
La (4.1) si generalizza in modo ovvio a N eventi: per esempio per 3 eventi si avrà

(4.1’) $$P(ABC)= P(C)P(B|C)P(A|BC)$$

o analoghe, scambiando i ruoli di A, B e C.

Dalla (4.1) discende poi una conseguenza interessante, che va sotto il nome di **legge della probabilità composta**: se due eventi A e B sono indipendenti, la probabilità che si verifichino entrambi è il prodotto delle loro probabilità. Difatti, se B è indipendente da A, per definizione di indipendenza si ha $P(B|A)=P(B)$, e quindi dalla (4.1) si ha subito

(4.2) $$A \text{ e } B \text{ indipendenti}: \quad P(AB) = P(A)P(B)$$

Si può dimostrare che la (4.2) vale in generale per N eventi fra loro indipendenti (purchè non lo siano solo a due a due)

(4.3) $$A, B, C, D, ... \text{ indipendenti}: P(ABCD....) = P(A)P(B)P(C)P(D).....$$

identità che giustifica la definizione adottata per N eventi indipendenti. Difatti, se tre eventi sono a due a due indipendenti, ma non lo sono in senso lato, la (4.3) porta a risultati errati. Vediamo un esempio. Ammettiamo di avere due dadi, uno rosso, uno giallo, che vengono lanciati una sola volta. Sia A l’evento “dispari sul giallo”, B l’evento “dispari sul rosso” e C l’evento “somma dispari sui due dadi”, non è difficile verificare che ognuno dei tre eventi ha probabilità ½ e che ogni evento è indipendente da ciascuno degli altri due. Proviamo ora ad applicare la (4.3). Si otterrebbe allora che la probabilità di avere “dispari sul giallo”, “dispari sul rosso” e allo stesso tempo una “somma dispari” sarebbe ½ per ½ per ½ , cioè 1/8, mentre è chiaro che l’evento considerato è del tutto impossibile (la somma di due dispari è per forza un numero pari). Dov’è l’errore? I tre eventi considerati, pur essendo a due a due indipendenti, non lo sono come terna. Difatti, il verificarsi di due qualsiasi di essi è addirittura incompatibile col verificarsi del terzo, azzerandone così la probabilità. La (4.3) non può quindi essere utilizzata in questo caso.
Vediamo ora qualche esempio di uso corretto delle formule (4.1)-(4.4). Si noti che spesso verrà usata anche la legge della probabilità totale (3.1).

1) Un po’ di gioco del lotto. Qual è la probabilità che in un’estrazione del lotto venga estratto sulla ruota di Napoli un dato numero, per esempio il 7? L’evento richiesto si verifica, se si verifica uno qualsiasi di 5 eventi incompatibili: o il 7 esce come primo estratto, o come secondo estratto, ... o come quinto estratto. Quindi, se abbiamo calcolato la probabilità di ciascuno di questi cinque eventi, basterà sommarle per avere la probabilità cercata. Mostriamo ora che la probabilità di ciascuno di questi cinque eventi è sempre la stessa, cioè 1/90. Ciò è ovvio per il primo estratto. Per il secondo estratto applichiamo la (4.1): la probabilità di estrarre 7 al secondo colpo si ottiene moltiplicando la probabilità che il 7 non esca come primo estratto, 89/90, per la probabilità che, non essendo stato estratto al primo colpo, venga estratto al secondo, quando ormai rimangono solo 89 numeri. Quest’ultima probabilità è dunque 1/89, e il prodotto delle due dà ancora 1/90. Quanto al 7 come terzo estratto, applicando la (4.1’) si arriva analogamente al prodotto di tre probabilità: (89/90)(88/89)(1/88) che è ancora 1/90. Idem per il quarto e il quinto estratto, mutatis mutandis. In conclusione, la probabilità totale di estrarre il 7 in qualcuno dei cinque posti è 5 volte 1/90, e quindi 1/18 = 5,56% (per la cronaca il Lotto vi paga solo 11,5 volte la posta, invece che 18, come sarebbe equo, se il numero esce davvero). Proviamo ora a chiederci qual è la probabilità che il 7 esca sia sulla ruota di Napoli che di Roma. E’ chiaro, per come vengono fatte le estrazioni, che i due eventi sono indipendenti, cioè il fatto che il 7 sia uscito su una ruota non altera affatto la probabilità

che esca su una qualsiasi altra (checchè ne pensino ciarlatani e sprovveduti), per cui la probabilità cercata è il prodotto delle due probabilità, $1/18^2$, cioè circa il 3,1 per mille. Infine chiediamoci quale sia la probabilità che il 7 esca o sulla ruota di Napoli o su quella di Roma. I due eventi, essendo indipendenti, non possono essere anche incompatibili, per cui non possiamo sommare le loro probabilità per avere la probabilità totale. Occorre invece usare la formula (3.2): P = S1 – S2. Ora S1 è: 1/18 + 1/18 = 1/9. Trattandosi poi di due soli eventi, S2 si riduce alla loro probabilità congiunta, che è stata appena calcolata, cioè $1/18^2$. Pertanto la probabilità cercata sarà $1/9 - 1/18^2$ = 35/324 = 10.8% . Un altro modo di calcolare questa probabilità è quello di ragionare al rovescio. Qual è la probabilità che il 7 non esca nè sulla ruota di Roma, nè su quella di Napoli ? E' chiaro che la probabilità cercata è il complemento a 1 di questa. L'evento testè considerato consiste nel verificarsi simultaneo di due eventi, che accadendo su due ruote distinte, abbiamo riconosciuto essere indipendenti. Ora ognuno di questi eventi ha probabilità 17/18, dato che, come abbiamo appena visto, l'evento opposto (l'uscita del 7 su una ruota) ha probabilità 1/18. Quindi la probabilità congiunta dei due eventi negativi, trattandosi di eventi indipendenti, è il prodotto delle loro probabilità cioè $(17/18)^2$ = 289/324, il cui complemento a 1 è di nuovo 35/324, come atteso.

2) Si lanciano tre dadi. Sapendo che le loro facce mostrano tre numeri diversi, qual è la probabilità che sia uscito un 6 ? Indichiamo con A l'evento "tre numeri diversi sui tre dadi", con B l'evento "l'uscita di un 6 su qualcuno dei tre dadi". La probabilità che ci viene richiesta è P(B|A), che possiamo calcolare usando la (4.1). Calcoliamo dunque prima P(A): i casi possibili sono 6x6x6=216, mentre i casi favorevoli sono 6x5x4, perchè, scelto un numero qualsiasi su un dado, ne restano solo 5 disponibili per il secondo e solo 4 per il terzo. Si ha dunque: P(A) = 120/216=5/9. Calcoliamo ora P(AB), cioè la probabilità che non solo esca un 6 ma anche che gli altri due numeri differiscano dal 6 e tra di loro. I casi possibili sono sempre 216, mentre i casi favorevoli sono 60, perchè il 6 può uscire su uno qualsiasi (ma uno solo) dei tre dadi, il secondo numero può essere uno qualsiasi dei 5 numeri rimasti e il terzo solo uno dei restanti 4, da cui 3x5x4=60. Si ha quindi P(AB)=60/216 e, infine, dalla (4.1): P(B|A) = P(AB)/P(A) = (60/216)/(120/216) = ½. Proviamo ora a chiederci quanto valga l'altra probabilità condizionata, P(A|B), cioè la probabilità che, essendo uscito (almeno) un 6 su qualcuno dei tre dadi, le loro facce mostrino tre numeri diversi. In vista di riusare la (4.1), calcoliamo prima P(B) , o meglio il suo rovescio, che è più facile. I casi possibili sono 6x6x6=216, mentre quelli favorevoli sono 5x5x5=125, per cui : P(B)=1 – 125/216= =91/216. Dalla (4.1) si ha ora, scambiando i ruoli di A e B: P(A|B) = P(AB)/P(B) = (60/216)/(91/216)=60/91. Dalla discussione si evince inoltre che i due eventi A e B non sono indipendenti, dato che per esempio P(B) non coincide con P(B|A).

Dalla risoluzione dell'ultimo problema si vede anche che in generale P(A|B) è diversa da P(B|A), l'unico caso in cui esse possono coincidere essendo quello in cui si ha P(A)=P(B). Infatti, in forza della (4.1) e della sua simmetrica, ottenuta scambiando i ruoli di A e B, una stessa quantità, cioè P(AB), deve coincidere sia col prodotto P(A)P(B|A) sia col prodotto P(B)P(A|B). Con ragionamento analogo è possibile provare che l'indipendenza di A da B implica anche il viceversa, circostanza la cui dimostrazione era stata lasciata in sospeso. Invero, se A è indipendente da B, si ha P(A)=P(A|B), ma per quanto appena detto deve anche risultare: P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B). Da queste due uguaglianze segue subito anche l'uguaglianza P(B|A)=P(B), cioè la condizione di indipendenza di B da A.

Dimostriamo infine la cosiddetta **formula di Bayes**. Si tratta di una formula in apparenza banale, del tutto innocua nell'ambito del calcolo delle probabilità, ma a quanto pare dotata di un potenziale esplosivo nel campo della statistica e della cosiddetta teoria della conferma, ove essa viene usata per così dire alla rovescia, cioè non per predire, data una qualsiasi di N possibili cause, la probabilità di ciascuno di M effetti aleatori (che possono prodursi anche come conseguenza delle altre cause), bensì la plausibilità a posteriori di ciascuna delle possibili cause, essendo noto il verificarsi di un ben determinato effetto fra gli M possibili. La legittimità dell'uso inverso della formula di Bayes è al centro da quasi tre secoli di un dibattito ancora vivo e animato che divide in due la comunità scientifica fra coloro che sono disposti ad attribuire un significato alla "probabilità a priori" di una causa (e ad assegnarle un valore) e quelli che ritengono tale concetto un puro nonsenso. Si tratta in realtà di un dibattito squisitamente filosofico che contrappone fieramente due ben distinte scuole di pensiero. Torneremo in seguito su questo aspetto dialettico che riguarda l'uso inferenziale della formula di Bayes. La controversia non mette tuttavia in discussione la validità di questa formula nell'ambito del calcolo delle probabilità. Per ora ci limitiamo a dimostrarla, in quanto banale conseguenza delle identità fin qui già acquisite. L'utilità della formula di Bayes consiste nel fatto che essa permette di calcolare le probabilità condizionate $P(A|\ B_k)$ ove siano note le loro duali $P(B_k\ |A)$, dove i B_k (k=1,2,..., N) sono N eventi **incompatibili** ed **esaustivi,** tali cioè da coprire tutte le possibili alternative. In tal caso risultano ovviamente incompatibili anche gli N eventi congiunti AB_1, AB_2 , ... , AB_N per ogni possibile evento A, e si potrà scrivere

(4.4) $$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + ... + P(AB_N)$$

dato che, esaurendo i B_k tutte le possibilità, se l'evento A si presenta, o si presenta insieme a B_1 o insieme a B_2, ... o insieme a B_N . E' bene tenere a mente che ciò è dovuto al fatto che <u>uno ed uno solo</u> degli eventi B deve per forza presentarsi ad ogni prova. Applicando ora ripetutamente la (4.1), il gioco è fatto. Innanzi tutto per ognuno degli addendi nella (4.4) si può scrivere in forza della (4.1)

(4.5) $$P(AB_k) = P(B_k)\, P(A|B_k)$$

e sostituendo nella (4.4)

(4.6) $$P(A) = \sum_1^N P(B_j)P(A|B_j)$$

Inoltre si ha, sempre in virtù della (4.1):

(4.7) $$P(B_kA) = P(A)\, P(B_k|A)$$

Ma l'evento AB_k coincide con l'evento B_kA. (in entrambi i casi devono presentarsi e l'evento A e l'evento B_k). Identificando quindi i secondi membri di (4.5) e (4.7) e risolvendo in $P(A|B_k)$, si ha

(4.8) $$P(B_k|A) = P(B_k)\, P(A|B_k) \ /\ P(A)$$

Sostituendo infine al denominatore l'espressione (4.6) si ottiene la celebrata formula di Bayes.

(4.9) $$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_1^N P(B_j)P(A|B_j)} \qquad (k=1, 2, 3, ... , N)$$

Una lettura possibile di questa formula è che, se conosciamo le probabilità degli eventi B_k , e le probabilità che, verificatosi uno qualunque dei B_k , si verifichi anche l'evento A, allora si possono calcolare anche tutte le N probabilità duali, cioè le probabilità che, sapendo che si è verificato l'evento A, si sia verificato anche l'evento B_k. Per esempio, nel lancio di un dado, sia A l'evento "esce un numero pari" e B_k l'evento "esce il numero k" con k=1,2,3,4,5,6. Le probabilità $P(B_k)$ valgono tutte 1/6. Le probabilità $P(A|B_k)$ valgono rispettivamente: 0, 1, 0, 1, 0, 1. A questo punto possiamo valutare il denominatore della (4.9) una volta per tutte. Esso vale: 1/6+1/6+1/6=1/2. Chiediamoci ora ad esempio quale sia la probabilità $P(B_1|A)$, cioè che, essendo uscito sul dado un numero pari, esso valga 1 (questa probabilità è ovviamente nulla). Usando la (4.9) si ottiene (1/6)(0)/(1/3) = 0, come doveva essere. Idem per 3 e per 5. Per 2,4 e 6 si otterrà invece dalla (4.9): (1/6)/(1/2)=1/3. Tale infatti è la probabilità che, essendo uscito un numero pari, tale numero sia per esempio il 4 (1 caso favorevole sui tre possibili rimasti). Questo è un'esercizio piuttosto banale, ma utile ad illustrare il significato della formola di Bayes. Essa diventa uno strumento essenziale in casi, e ce ne sono tanti, in cui, mentre è facile valutare sia le probabilità $P(A!B_k)$ che le probabilità $P(B_k)$, risulti invece arduo valutare direttamente le probabilità duali $P(B_k|A)$, che sono proprio quelle di interesse per la soluzione di un problema. Un tipico esempio è il seguente.

Il problema dei sei treni. Gianni di solito va al lavoro usando la metro, ma un giorno su cinque, a caso, prende l'auto. Quando torna a casa con la metro, arriva alla stazione EUR-Fermi con uno qualsiasi di 6 treni successivi. Luisa, che conosce bene le sue abitudini, e desidera parlargli con urgenza da sola, va ad aspettarlo alla stazione EUR-Fermi, sapendo con certezza che egli è andato al lavoro. Ma Piero non arriva con nessuno dei primi 5 treni. Qual è ora la probabilità che arrivi proprio con l'ultimo treno? Questa probabilità non è facile da calcolare direttamente, ma il problema si può aggirare bene con la formula di Bayes. Conviene indicare con A l'evento "Gianni non prende nessuno dei primi 5 treni", con B_1 l'evento "stamane Gianni ha preso l'auto" e con B_2 l'evento "stamane ha preso la metro". Questi ultimi due eventi sono incompatibili ed esauriscono tutte le possibilità. Inoltre $P(B_1) = 1/5$ e $P(B_2) = 4/5$. La probabilità $P(A|B_1)$ che, avendo preso l'auto, Gianni non sia salito su nessuno dei cinque treni è 1 (la cosa è certa), mentre $P(A|B_2)$, cioè la probabilità che Gianni, avendo preso la metro, non si trovi su nessuno dei cinque treni è pari alla probabilità che egli fra i 6 treni possibili prenda il sesto, cioè 1/6. A questo punto possiamo valutare il denominatore della (4.9), che dà $(1/5)(1)+(4/5)(1/6) = 1/3$. Ora siamo in grado di calcolare per esempio la probabilità che Gianni abbia preso l'auto, sapendo che non era su nessuno dei primi cinque treni della metro. Tale probabilità è $P(B_1|A)$. In questo caso (k=1) il numeratore della (4.9) vale $(1/5)(1) = 1/5$ e, dividendo per il denominatore, si ha $P(B_1|A)=(1/5)/(1/3) = 3/5$. Si noti come la probabilità che Gianni abbia preso l'auto, che valeva 1/5 prima di constatare la sua assenza sui primi 5 treni, dopo la constatazione è tre volte più grande. La probabilità 1/5 viene detta **probabilità a priori**, e 3/5 è la **probabilità a posteriori**, cioè ricalcolata dopo aver acquisito una nuova informazione. Ovviamente la risposta al nostro problema è il complemento a 1 di quest'ultima probabilità (cioè 2/5), perchè nel caso contrario, cioè se Gianni non ha preso l'auto, allora egli deve per forza arrivare con l'ultimo treno. Questo risultato poteva anche ottenersi valutando direttamente, sempre con la (4.9), la probabilità $P(B_2|A)=(4/5)(1/6) / (1/3) = 12/30 = 2/5 = 40\%$. Con la stessa tecnica è possibile valutare in generale la probabilità che Gianni arrivi col j.mo treno, ammesso di non averlo visto arrivare coi primi j-1 treni (j=1,2,3,4,5,6), l'esercizio appena risolto essendo il caso j=6.

BIBLIOGRAFIA

Davenport W.B., 1970: *Probability and random processes*. McGraw-Hill, 542 pp. (Capp. 3-4).
Feller W. , 1957 : *An introduction to probability theory and its applications - Vol. 1*. J.Wiley & Sons, 3rd edition.
Rozanov Y.A., 1969: *Introductory probability theory*. Prentice Hall (traduz. dal russo di R.A. Silverman).

Corso di : Calcolo delle Probabilità e Statistica Matematica

-

tenuto dal Dott. Vincenzo Malvestuto, ricercatore del CNR

Istituto di Fisica delll'Atmosfera (06-4993-4266 , e-mail: malves.@ifa.rm.cnr.it)

Area della Ricerca del CNR a TorVergata

Via del Fosso del Cavaliere, 100 – 00133 ROMA

PROGRAMMA DEL CORSO (35 lezioni di un'ora ciascuna)

Calcolo delle Probabilità

1. Alcuni problemi classici in teoria delle probabilità: Cardano, Pascal, Newton e il gioco dei dadi.

2. Definizione di Probabilità. Il Paradosso di Bertrand. Le tre soluzioni: Kolmogorov, von Mises, e Ramsey - DeFinetti. Scuola assiomatica, frequentistica, soggettivista. Chi ha ragione?

3. Bernoulli e il Paradosso di Pietroburgo: una variabile aleatoria con media infinita! Il dilemma delle due borse.

4. Probabilità Totale, Composta, Condizionata: Leggi e teoremi. Esempi e Problemi. Le leggi di Mendel e la "genetica delle popolazioni" dal punto di vista del calcolo delle probabilità.

5. L'urna di Bertrand. L'ago di Buffon. Il fumatore di Banach. L'importanza di chiamarsi Ernesto.

6. Definizione di verosimiglianza. Le probabilità a posteriori. Il teorema di Bayes e il problema delle palle di biliardo. L'estensione di Laplace. L'errore di Carnap. Il problema del test di gravidanza. Il problema dei sette treni. Il problema di Monty Hall e la soluzione di Madame von Bravatsky.

7. I momenti di una distribuzione di Probabilità: valore medio (o aspettato), varianza, skewness e curtosis. Mediana e moda. Le stranezze del valore medio.

8. Le distribuzioni di probabilità più comuni per variabili aleatorie discrete e loro momenti.

9. Le distribuzioni di probabilità più comuni per variabili aleatorie continue e loro momenti.

10. I teoremi fondamentali: il teorema centrale del limite e la la legge dei grandi numeri (versione debole e versione forte). L'errore di D'Alembert e la memoria del caso.

11. La correlazione fra due o più variabili aleatorie: definizione e misura. Catene di Markov: definizione.

12. Trasformazioni di variabili aleatorie. Funzioni di una o più variabili aleatorie.

13. La generazione di numeri (pseudo)casuali su computer secondo una distribuzione qualsiasi. Un

esempio: la generazione di smazzate casuali nel bridge. I test di casualità. Il Metodo Montecarlo.

Statistica

14. Il problema centrale della statistica come problema inverso del calcolo delle probabilità.

Definizione di campione. Indici di variabilità di un campione e misure della dispersione.

Media, scarti, deviazione standard e momenti di ordine superiore di un campione.

Coefficiente di determinazione fra due campioni di due variabili aleatorie.

Variabili aleatorie campionarie e loro uso per la stima dei parametri di un modello.

15. Il principio della massima verosimiglianza. La statistica bayesiana.

La nascita della statistica matematica: Galton, Fischer, Pearson, Spearman, Hotelling.

16. Stima di una probabilità. Stima di un valor medio. Stima di una varianza. Stima della correlazione.

17. Il problema del test di un'ipotesi in generale. Gli errori di 1.a e 2.a specie. Livelli di affidabilità. Intervalli di fiducia. I test di Gauss, Student, Fisher e Snedecor. L' r-test.

18. La valutazione del divario globale. Il test del chi-quadro. Il test di Kolmogorov. Applicazione ad un esperimento di chiaroveggenza.

19. La teoria della regressione lineare e non, con una o più variabili. L'analisi dei residui.

20. L'analisi della varianza. I test di correlazione.

21. Il metodo dei minimi quadrati in generale. Accezione matematica e accezione statistica.

22. Il metodo delle componenti principali. Il paradosso dello scaling.

23. L'analisi fattoriale.

24. Il metodo delle Empirical Orthogonal Functions.

25. Applicazioni alla teoria della propagazione degli errori. Il disegno di un esperimento.

Le restanti 10 lezioni, dalla n. 26 alla n. 35, saranno dedicate ad applicazioni varie alla Geofisica, alla Biologia ed altre discipline, tenendo anche conto delle indicazioni che emergeranno dall'uditorio.

Introduzione alla Teoria dei Giochi e delle Decisioni

26. Posizione del problema come problema di ottimizzazione. La funzione di merito.

Esempi: il Googol e il problema della zitella; “Lotto alle Otto”, Mastermind, Risiko.

27. I giochi d’azzardo: il Lotto e il problema dei numeri (o dei giocatori?) ritardati.

28. I giochi a montepremi. SuperEnalotto, Totocalcio, Totogol.

29. I giochi a lotteria. Ricerca di una strategia ottimale. Un modello semplice di Borsa.

30. I giochi da casinò: giochi d’azzardo (baccarat, roulette e craps) e giochi di abilità (Black-Jack).

31. Giochi sostenibili e non. Giochi suicidi. Il teorema della rovina del giocatore.

32. Giochi di scommesse. Il problema primario: il riconoscimento delle occasioni favorevoli. Il problema secondario: la determinazione della posta e il metodo di Kelly.

33. Il problema della valutazione a posteriori della capacità di un pronosticatore. Applicazione ai modelli di weather-forecasting.

34. La teoria dei giochi secondo von Neumann e Morgernstern. Il teorema del minimax. Gli equilibri di Nash. La morra italiana e la morra cinese. Alcuni colpi nel finale del backgammon. Ottimizzazione del gioco della carta nel bridge. Applicazioni alla psicologia, alla sociologia, alla politica e all’arte militare.

35. I giochi come modelli etologici. Falchi o colombe? Il dilemma del prigioniero e la gara di Axelrod: competizione o cooperazione? La sociobiologia e la memetica di Dawkins.

Calendario: tutti i mercoledì dalle ore 11:30 alle 12:30 a partire dal 2/5/2001 presso l’Aula Seminari dell’IFA (1° piano, di fronte all’ascensore)

Info: Per tutte le informazioni rivolgersi alla Segreteria Scientifica dell’IFA, sig.ra Marina Benedetti, tel. 06-4993-4317, e-mail: marina.benedetti@ifa.rm.cnr.it